

## Los 4 Ases

Sobre una mesa cuadrada giratoria, una persona coloca los 4 ases, uno en cada esquina, y deja boca abajo un cierto número de ellos (uno, dos, tres o los cuatro). Yo, sin haber visto nada, y con los ojos vendados, tengo que conseguir dejar cara arriba los 4 ases realizando varias jugadas. En cada jugada, puedo dar la vuelta a una, dos, tres o las cuatro cartas. Después de cada jugada, la persona que ha colocado las cartas girará la mesa las veces que quiera, para de esta manera evitar que yo pueda saber qué cartas he dado la vuelta. La pregunta es: ¿Existe un número finito de jugadas con las que yo esté seguro de haber dejado cara arriba los 4 ases? Si la respuesta es afirmativa, hay que decir en cuántas jugadas y cómo lo haríamos; si la respuesta es negativa, explicar el porqué.

### Solución

Se puede estar seguro de haber dejado los cuatro ases boca arriba en 15 jugadas, independientemente de la suerte que se tenga y la mala leche del contrincante que nos gira la mesa, si se sigue una determinada estrategia explicada más adelante.

Sin embargo no apostaría a que este sea el mínimo de jugadas necesarias. En la estrategia que sigo, se "desperdicia" una jugada para descartar una situación concreta (los cuatro ases boca abajo) en 7 ocasiones. Me sorprendería que no hubiera otras estrategias que permitieran garantizar que se han dejado los cuatro ases boca arriba en menos jugadas.

### Demostración

#### Nomenclatura

Para empezar, vamos a usar una nomenclatura para definir la situación de los ases en un momento dado. Para ello partimos de una zona de la mesa, (por ejemplo la 1 en la figura del enunciado), y de un sentido (de 1 a 2), y damos la vuelta a la mesa escribiendo una A si el As está boca arriba (visible) y una X si está boca abajo (oculto). Con ello generamos una cadena de cuatro caracteres correspondientes al estado de los ases en las posiciones 1,2,4 y 3 de la figura del enunciado. Nótese que he dado la vuelta al 3 y 4, simplemente porque prefiero que la secuencia corresponda al orden que encontramos al recorrer circularmente la mesa (manía personal sin más trascendencia).

De este modo, la secuencia AAAA indica todos los ases boca arriba, la XXXX todos boca abajo y la AXXA que los ases en las posiciones 1 y 3 (de la figura del enunciado) están boca arriba y los de la 2 y 4 están boca abajo. En total tendremos  $2^4=16$  situaciones posibles.

A continuación vamos a clasificar estas 16 situaciones agrupando aquellas que son equivalentes al girar la mesa:

- Llamaremos tipo T0 a la única situación en que no es visible ningún as (XXXX)
- Llamaremos tipo T1 a las cuatro situaciones en que solo es visible un as (AXXX, XAXX, XXAX y XXXA)
- Llamaremos tipo T2A a las cuatro situaciones en que son visibles dos ases adyacentes (AAXX, XAAX, XXAA, AXXA). Nótese que tal como hemos definido la secuencia, los dos ases visibles en AXXA son adyacentes puestos sobre la mesa circular.
- Llamaremos tipo T2C a las dos situaciones en que son visibles dos ases en posición cruzada (AXAX, XAXA).
- Llamaremos tipo T3 a las cuatro situaciones en que son visibles tres ases (AAAX, AAXA, AXAA, XAAA)
- Llamaremos tipo T4 a la situación que son visibles los 4 ases (AAAA).

Fijémonos en que si y solo si dos situaciones son del mismo tipo, se pasa de una a otra girando la mesa.

Esta nomenclatura no será muy útil, ya que debido a que el contrincante gira la mesa después de cada jugada que realicemos, lo único que podremos asegurar de la situación de las cartas es su tipo (T0, T1, T2A, T2C, T3 o T4).

### Efecto de voltear las cuatro cartas.

Vamos a ver el efecto de voltear las 4 cartas. En la siguiente tabla se muestra:

- en la primera fila, el tipo de situación antes de voltear las dos cartas
- en la segunda, las 16 situaciones posibles (antes de voltear)
- en la tercera en que situación se convierte cada una después de voltear las cuatro cartas
- en la cuarta, el tipo resultante

Efecto de voltear las cuatro cartas																
Tipo	T0	T1				T2A				T2C		T3				T4
Antes	XXXX	XXXA	XXAX	XAXX	AXXX	AAXX	XAAX	XXAA	AXXA	AXAX	XAXA	AAAX	AAXA	AXAA	XAAA	AAAA
Después	AAAA	AAAX	AAXA	AXAA	XAAA	XXAA	AXXA	AAXX	XAAX	XAXA	AXAX	XXXX	XXAX	XAXX	AXXX	XXXX
Tipo	T4	T3	T3	T3	T3	T2A	T2A	T2A	T2A	T2C	T2C	T1	T1	T1	T1	T0

### Efecto de voltear dos cartas en posiciones opuestas.

Vamos a ver el efecto, sobre cada una de las 16 situaciones posiciones, de voltear dos cartas en posiciones opuestas, por ejemplo las que ocupan el primer y tercer carácter en nuestra secuencia.

Efecto de voltear las cartas en posiciones 1 y opuesta																
Tipo	T0	T1				T2A				T2C		T3				T4
Antes	XXXX	XXXA	XXAX	XAXX	AXXX	AAXX	XAAX	XXAA	AXXA	AXAX	XAXA	AAAX	AAXA	AXAA	XAAA	AAAA
Después	AXAX	AXAA	AXXX	AAAX	XXAX	XAAX	AAXX	AXXA	XXAA	XXXX	AAAA	XAXX	XAAA	XXXX	AAXA	XAXA
Tipo	T2C	T3	T1	T3	T1	T2A	T2A	T2A	T2A	T0	T4	T1	T3	T1	T3	T2C

Se observan cosas interesantes:

- Si en la situación inicial hay dos ases en posiciones cruzadas (T2C), en la final o bien están los cuatro boca arriba (T4), o bien los cuatro boca abajo (T0), según qué dos ases fueran los que estaban visibles.
- Si en la situación inicial hay dos ases en posiciones adyacentes (T2A), después de voltear las dos cartas seguirá habiendo dos ases en posiciones adyacentes.
- Si en la situación inicial hay un as boca arriba (T1), en la final habrá uno (T1) o tres (T3) boca arriba.
- Si en la situación inicial hay tres ases boca arriba (T3), en la final habrá uno (T1) o tres (T3) boca arriba.
- Si en la situación inicial todos los ases están boca arriba (T4) o boca abajo (T0), en la final quedarán dos en posición cruzada (T2C).

### Primer paso de la estrategia: descubrir ases en posiciones cruzadas.

Si el contrincante nos pone dos ases visibles en posición cruzada y dos ocultos, al voltear la primera y tercera carta quedarán todos boca arriba o todos boca abajo. En el primer caso habremos ganado, en el segundo, nos bastará con dar la vuelta a las cuatro cartas para haber ganado, aunque entre las dos jugadas el contrincante gire la mesa. Por tanto estas dos jugadas (voltear primera y tercera, a continuación el contrincante nos gira la mesa, y después damos la vuelta a las cuatro cartas) garantiza descubrir los cuatro ases si en la posición inicial había solo dos visibles en posición cruzada.

¿Y si no era esta la posición inicial?. En caso de que inicialmente estuvieran visibles dos ases, pero en posición adyacente, seguirá habiendo dos ases visibles en posición adyacente. En caso de que inicialmente hubiera un número impar (1 o 3) de ases visibles, seguirá habiendo un número impar de ases visibles. En la posición inicial, por las condiciones del enunciado, no pueden estar los cuatro ases visibles. La situación que queda es que los cuatro ases estuvieran inicialmente ocultos. En este caso, quedarán dos visibles en posiciones cruzadas. Esto último es un fastidio, ya que es la única situación en que nos quedan dos ases en posiciones cruzadas. Para evitarla, nuestra primera jugada será voltear todos los ases.

En definitiva, nuestras tres primeras jugadas serán las siguientes:

Jugada	Cartas volteadas	Objeto	Situación inicial				
			T0	T1	T3	T2A	T2C
#1	las cuatro	Descubrir T0	T4	T3	T1	T2A	T2C
#2	1 y opuesta	Descubrir ases cruzados		T1 / T3	T1 / T3	T2A	T0 / T4
#3	las cuatro	Descubrir T0		T1 / T3	T1 / T3	T2A	T4

Explicuemos la tabla. En las celdas del encabezado se señala la situación inicial, clasificada por tipo (el tipo T4 no es posible inicialmente por las condiciones del enunciado). En la fila de una jugada, se señala a que tipo corresponde la situación en que quedan las cartas después de realizar la jugada. Por ejemplo, para la situación inicial tipo T1 (un as visible), después de la jugada #1 (voltear las cuatro cartas), la situación resultante es tipo T3. En ocasiones, no se puede asegurar una situación. Por ejemplo después de la segunda jugada (voltear dos cartas opuestas), una situación T1 se transforma en T1 o T3, dependiendo de cual fuera el as visible. Por último, si una jugada ocasiona un T4 (los cuatro ases boca arriba, marcado en verde), corresponderá a ganar la partida, por lo que no es preciso continuar analizando esa situación.

Tras estas explicaciones queda claro: después de las tres jugadas indicadas, o bien hemos ganado, o bien han quedado las cartas en una de estas situaciones:

- Con dos ases descubiertos adyacentes (T2A)
- Con solo un as descubierto (T1)
- Con tres ases descubiertos (T3)

**Segundo paso de la estrategia: descubrir ases en posiciones adyacentes.**

Para descubrir los ases en posiciones adyacentes, voltearemos dos cartas adyacentes, por ejemplo las de las posiciones 1 y 2 de nuestra cadena.

Efecto de voltear las cartas en posiciones 1 y adyacente																
Tipo	T0	T1				T2A				T2C		T3			T4	
Antes	XXXX	XXXA	XXAX	XAXX	AXXX	AAXX	XAAX	XXAA	AXXA	AXAX	XAXA	AAAX	AAXA	AXAA	XAAA	AAAA
Después	AAXX	AAXA	AAAX	AXXX	XAXX	XXXX	AXAX	AAAA	XAXA	XAAX	AAXA	XXAX	XXXA	XAAA	AXAA	XXAA
Tipo	T2A	T3	T3	T1	T1	T0	T2C	T4	T2C	T2A	T2A	T1	T1	T3	T3	T2A

No necesitamos analizar todas las situaciones, ya que, a estas alturas (después de la tercera jugada), sabemos que las cartas están en situaciones tipo T1, T3 o T2A. Si la situación después de la tercera jugada era tipo T1 o T3, después de voltear dos cartas adyacentes continuaremos en T1 o T3. Si la situación era T2A, según que ases fueran los visibles, pasaremos a T0 (todos ocultos), T2C (dos ases en posición cruzada) o T4 (todos visibles). Si la situación es T4, habremos ganado. Si es T0, "gastaremos" una jugada, volteando las cuatro cartas, para descubrirla. Si es T2C, este volteo de las cuatro cartas no le afectará. Para descubrir los ases en posición cruzadas, ya sabemos lo que hay que hacer: voltear dos cartas opuestas (lo que nos deja o todos los ases boca arriba o todos boca abajo), y a continuación voltear las cuatro.

Continuemos nuestra tabla con estas jugadas (#4, #5, #6 y #7).

Jugada	Cartas volteadas	Objeto	Situación inicial				
			T0	T1	T3	T2A	T2C
#1	las cuatro	Descubrir T0	T4	T3	T1	T2A	T2C
#2	1 y opuesta	Descubrir ases cruzados		T1 / T3	T1 / T3	T2A	T0 / T4
#3	las cuatro	Descubrir T0		T1 / T3	T1 / T3	T2A	T4
#4	1 y adyacente	Convertir ases adyacentes en cruzados		T1 / T3	T1 / T3	T0 / T4 / T2C	
#5	las cuatro	Descubrir T0		T1 / T3	T1 / T3	T4 / T2C	
#6	1 y opuesta	Descubrir ases cruzados		T1 / T3	T1 / T3	T0 / T4	
#7	las cuatro	Descubrir T0		T1 / T3	T1 / T3	T4	

Después de 7 jugadas, hemos conseguido o bien ganar, o bien que haya un número impar (uno o tres) de ases visibles.

**Tercer paso de la estrategia: descubrir número impar de ases.**

Ahora que sabemos que hay un número impar de ases visibles, voltearemos una sola carta. Esto nos asegura que nos quedaremos con un número par de ases visibles: o bien ninguno (si solo había uno y es el que hemos volteado), o bien dos (si había uno y hemos volteado otra carta, o si había tres y hemos volteado una de ellas), o bien cuatro (si había tres y hemos tenido la suerte de voltear el as oculto). En caso de ser dos los ases visibles, no sabemos si quedan en posiciones adyacentes o cruzadas. Como en otras ocasiones, la siguiente jugada será voltear las cuatro cartas, para descubrir el caso en que hayan quedado todos los ases boca abajo, y seguiremos con la estrategia de descubrir, primero, los ases en posición cruzada, y a continuación los que están en posición adyacente. Escribamos todo esto en nuestra tabla de jugadas (de la #8 en adelante):

Jugada	Cartas volteadas	Objeto	Situación inicial				
			T0	T1	T3	T2A	T2C
#1	las cuatro	Descubrir T0	T4	T3	T1	T2A	T2C
#2	1 y opuesta	Descubrir ases cruzados		T1 / T3	T1 / T3	T2A	T0 / T4
#3	las cuatro	Descubrir T0		T1 / T3	T1 / T3	T2A	T4
#4	1 y adyacente	Convertir ases adyacentes en cruzados		T1 / T3	T1 / T3	T0 / T4 / T2C	
#5	las cuatro	Descubrir T0		T1 / T3	T1 / T3	T4 / T2C	
#6	1 y opuesta	Descubrir ases cruzados		T1 / T3	T1 / T3	T0 / T4	
#7	las cuatro	Descubrir T0		T1 / T3	T1 / T3	T4	
#8	solo la 1	Convertir en par numero de ases visibles		T0 / T2A / T2C / T4			
#9	las cuatro	Descubrir T0		T4 / T2A / T2C			
#10	1 y opuesta	Descubrir ases cruzados		T2A / T0 / T4			
#11	las cuatro	Descubrir T0		T2A / T4			
#12	1 y adyacente	Convertir ases adyacentes en cruzados		T0 / T4 o T2C			
#13	las cuatro	Descubrir T0		T4 / T2C			
#14	1 y opuesta	Descubrir ases cruzados		T0 / T4			
#15	las cuatro	Descubrir T0		T4			

Finalmente, vemos que en 15 jugadas hemos descubierto los cuatro ases, sea cual fuera la situación inicial y los giros efectuados por el contrincante.