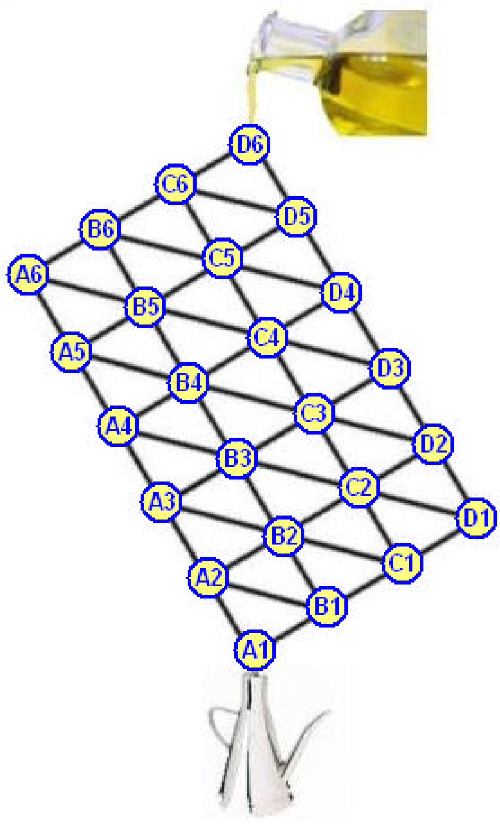
Desafío 46 La gota de aceite

Dada la rejilla de la imagen, ¿Por cuantos caminos distintos puede deslizarse el aceite desde la botella a la aceitera?



Solución.

Hay 3353 caminos diferentes para la gota de aceite.

Demostración.

Numeramos los nodos conforme a la figura, de modo que el problema se trata de averiguar el número de caminos diferentes del nodo D6 al nodo A1. Definimos ahora unas variables, con el mismo nombre del nodo, para calcular el número de caminos de ese nodo al A1. Por ejemplo, C4 sería el número de caminos diferentes del nodo C4 al nodo A1.

Nos fijamos en los nodos de la fila inferior. Por ejemplo, desde D1, la gota de aceite solo puede caer a C1. Desde C1 solo puede caer a B1 y desde B1 solo puede caer a A1. Por tanto, A1=B1=C1=D1=1.

Nos fijamos en los nodos de la segunda fila:

- Desde A2, la gota de aceite puede caer directamente a A1, o bien caer a B1, y desde aquí a A1. Hay por tanto dos caminos que puede seguir, por lo que A2=2.
- Desde B2, la gota puede caer a A2, a B1 o a C1. Si cae a A2, puede seguir dos caminos. Si cae a B1 puede seguir un único camino. Si cae a C1, puede seguir también un único camino. Por tanto el número total de caminos que puede seguir una gota desde B1 para llegar a A1 sería 4: dos a través de A2, uno a través de B1 y otro a través de C1.
- Desde C2, la gota puede caer a B2, C1 o D1. El número de caminos diferentes será la suma de los que puede tomar desde cualquiera de esos nodos. Por tanto C2 = B2 + C1 + D1 = 4 + 1 + 1 = 6.
- Desde D2, la gota puede caer a C2 o D1. Por tanto D2 = C2 + D1 = 6 + 1 = 7.

En general, el número de caminos que puede tomar una gota desde un nodo determinado será la suma de los caminos que puede tomar desde cualquiera de los nodos a los que puede caer. Desde una fila la gota no puede “subir” a una fila superior. Dentro de la misma fila una gota no puede subir desde un nodo A al B, ni del B al C, ni del C al D. Por tanto, si recorremos los nodos de las filas inferiores a las superiores, y dentro de cada fila del A al D, siempre podemos calcular los caminos de un nodo a partir de datos calculados previamente.

Las relaciones que se han escrito antes para la segunda fila se pueden generalizar para cualquier fila. Podemos expresar los caminos de cada nodo de la fila N en función de otros nodos de la misma fila y de los nodos de la fila N-1:

A(N) = A(N-1) + B(N-1)
B(N) = A(N) + B(N-1) + C(N-1)
C(N) = B(N) + C(N-1) + D(N-1)
D(N) = C(N) + D(N-1)

Utilizando estas expresiones para las 6 filas, tenemos:

A1 = 1	B1 = 1	C1 = 1	D1 = 1
A2 = A1 + B1 = 2	B2 = A2 + B1 + C1 = 4	C2 = B2 + C1 + D1 = 6	D2 = C2 + D1 = 7
A3 = A2 + B2 = 6	B3 = A3 + B2 + C2 = 16	C3 = B3 + C2 + D2 = 29	D3 = C3 + D2 = 36
A4 = A3 + B3 = 22	B4 = A4 + B3 + C3 = 67	C4 = B4 + C3 + D3 = 132	D4 = C4 + D3 = 168
A5 = A4 + B4 = 89	B5 = A5 + B4 + C4 = 288	C5 = B5 + C4 + D4 = 588	D5 = C5 + D4 = 756
A6 = A5 + B5 = 377	B6 = A6 + B5 + C5 = 1253	C6 = B6 + C5 + D5 = 2597	D6 = C6 + D5 = 3353

Por tanto el número de caminos pedido en el enunciado es D6 = 3353.

Hacia una fórmula general.

Manipulando un poco las expresiones anteriores para los nodos de una fila, se puede llegar a expresar cada variable en función exclusivamente de los valores de la fila anterior:

A(N) = A(N-1) + B(N-1)
B(N) = A(N-1) + 2*B(N-1) + C(N-1)
C(N) = A(N-1) + 2*B(N-1) + 2*C(N-1) + D(N-1)
D(N) = A(N-1) + 2*B(N-1) + 2*C(N-1) + 2*D(N-1)

Imagino que de ahí se podrá obtener una fórmula general para A(N), B(N), C(N) y D(N), que permita obtener rápidamente los valores para rejillas más “altas”. Yo no he llegado a ella, pero utilizando excel para calcular valores grandes, llego a una aproximación a la fórmula general, que parece ser exponencial:

D(N) = 0,47168579 * 4,39025688 ^ N